

考虑模型不确定性的结构可靠度分析方法

吕大刚, 宋鹏彦, 王光远

(哈尔滨工业大学 土木工程学院, 150090 哈尔滨, ludagang@hit.edu.cn)

摘要: 为了更充分地研究模型不确定性对结构可靠度的影响, 本文将综合考虑物理不确定性和模型不确定性, 以 Bayes 理论为数学工具, 对结构的统计可靠度问题进行研究. 首先对 Bayes 理论进行概括和总结, 采用该理论对结构工程中的模型不确定性进行建模和分析; 然后研究考虑模型不确定性的结构可靠度分析方法, 给出考虑模型不确定性的各种结构可靠性测度, 并研究综合考虑主观不确定性与客观不确定性的整体式与分离式可靠度计算方法; 最后通过 2 个算例, 分析模型不确定性对结构可靠度的影响.

关键词: 随机可靠度; 统计可靠度; 物理不确定性; 模型不确定性; Bayes 统计学

中图分类号: TU311.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2011)10-0001-05

Reliability analysis methods of structures considering modeling uncertainty

LÜ Da-gang, SONG Peng-yan, WANG Guang-yuan

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, 150090 Harbin, China, ludagang@hit.edu.cn)

Abstract: To fully investigate the influence of modeling uncertainty on reliability of structures, in this paper, the statistical reliability problem of structures considering two kinds of uncertainties, i. e., physical uncertainty and modeling uncertainty is deeply studied on the basis of Bayesian statistics. First, the fundamental principles of Bayesian statistics are summarized. The modeling uncertainty in structural engineering is then modeled and analyzed by Bayesian updating approach, and the various measures for structural statistical reliability are introduced. To treat with the aleatory and epistemic uncertainties, two methods, i. e., the integrated approach and the separate approach for statistical reliability analysis of structures considering both physical uncertainty and modeling uncertainty are proposed. Two examples are given, one of which is a numerical one; the other is a problem of soil liquefaction. The examples demonstrate the effects of modeling uncertainty on the reliability indices of structures.

Key words: random reliability; statistical reliability; physical uncertainty; modeling uncertainty; Bayesian statistics

结构工程中的随机性包括物理不确定性、统计不确定性和模型不确定性. 经典的结构可靠度理论属于随机可靠度理论, 因为它处理的主要是物理不确定性问题. 目前, 对于考虑统计不确定性与模型不确定性的结构统计可靠度问题, 研究得不充分.

Egeland^[1]较早地注意到了结构的随机可靠

度与统计可靠度这 2 个学科之间的分野, 并提出了将这 2 种理论进行融合的建议. 对于模型不确定性对结构可靠度的影响, 目前国内外结构设计规范的统一处理方法是在考虑材料性能和几何参数随机性的抗力模型基础上, 引入一个考虑计算模式随机性的随机变量, 以考虑模型不确定性的影响. 这种方法很粗糙, 且属于经典的随机可靠度理论范畴. Ditlevsen^[2]首先提出了采用 Bayes 统计理论研究模型不确定性的方法, Maes^[3]研究了承受模型不确定性时设计荷载准则的规范化问题, Zhang 和 Mahadevan^[4]研究了基于可靠度的检测

收稿日期: 2010-04-26.

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划(90715021);
国家自然科学基金资助项目(51178150).

作者简介: 吕大刚(1970—), 男, 教授, 博士生导师;
王光远(1924—), 男, 博士生导师, 中国工程院院士.

理论中的模型不确定性和 Bayes 修正技术, Mahadevan 等^[5]采用 Bayes 概率网络技术,系统地研究了模型不确定性的分析与验证方法, Igusa 等^[6]采用 Bayes 分析技术较系统地研究了结构工程中的不确定性,特别是模型不确定性. Der Kiureghian 等^[7-8]深入研究了在不完全知识状态下结构安全性的各种测度,并提出了考虑模型不确定性的结构地震易损性分析方法.

本文将综合考虑物理不确定性和模型不确定性,以 Bayes 统计理论为数学工具,对结构的统计可靠度问题进行深入研究.

1 模型不确定性的 Bayes 建模与修正

1.1 Bayes 修正公式

在 Bayes 统计学中, Bayes 公式通过来源于观测数据的似然函数修正先验概率分布,从而将主观信息与客观信息进行有机集成

$$f''_{\theta}(\theta) = cL(\theta)f'_{\theta}(\theta). \quad (1)$$

式中: $f'_{\theta}(\theta)$ 为随机参数 θ 的先验分布, $L(\theta)$ 为 θ 的似然函数, $c = [\int_{\theta} L(\theta)f'_{\theta}(\theta) d\theta]^{-1}$ 为归一化因子, $f''_{\theta}(\theta)$ 为 θ 的后验分布.

确定先验分布的方法主要有主观先验分布、扩散先验分布、无信息先验分布、共轭先验分布等; 似然函数是根据客观信息通过似然原理确定的; 后验分布实际上是给定样本观测值 x 后 θ 的条件分布: $f''_{\theta}(\theta|x) \propto L(\theta|x)f'_{\theta}(\theta)$, 后验分布一旦得到, 即可得到 θ 的平均值和标准差等后验统计信息.

1.2 模型不确定性的建模与分析

利用 Bayes 修正式(1)可对模型不确定性进行建模与分析. 结构工程中的模型不确定性及其相应的处理方法主要可分为 3 大类: (1) 模型的形式不精确, 但是可以采用精确的方式对其进行观测; (2) 模型的形式不精确, 对模型的观测也存在误差; (3) 对现有的近似模型进行校正.

对于非精确模型、精确观测的情况, 统计模型可表示为

$$y = \hat{g}(x, \theta_g) + \mu + \sigma\varepsilon. \quad (2)$$

式中: $\hat{g}(x, \theta_g)$ 为精确模型的近似模型, 其中 x 为基本随机变量, θ_g 为模型参数; μ 为偏差, 即系统误差; ε 为具有零均值和单位标准差的随机变量; σ 为模型误差的标准差, 是对模型不确定性的测度.

假设: (1) 正态性, $\varepsilon = N(0, 1)$; (2) 同方差性, σ 与 x 独立且相等; (3) 无偏性, 即令 $\mu = 0$, 可得似然函数为

$$L(\theta_g, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{g}(x_i, \theta_g)}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (3)$$

对于非精确模型、有观测误差的情况, 统计模型可表示为

$$y_i = \hat{y}_i + e_i. \quad (4)$$

式中 $e_i = N(0, s^2)$ 为无偏观测.

可得似然函数为

$$L(\theta_g, \sigma) \propto \frac{1}{(\sigma^2 + s^2)^{n/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{y}_i - \hat{g}(x_i, \theta_g)}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}}\right)^2\right]. \quad (5)$$

对现有近似模型的校正情况, 统计模型可表示为

$$y = \hat{g}(x) + \mu(x, \theta_g) + \sigma\varepsilon = g(x, \theta_g) + \sigma\varepsilon. \quad (6)$$

式中 $\mu(x, \theta_g)$ 为校正项, 其一般形式为

$$\mu(x, \theta_g) = \sum_k \theta_{gk} h_k(x). \quad (7)$$

式中 $h_k(x)$ 称为“解释性函数”^[9].

2 考虑模型不确定性的结构可靠性测度

将模型不确定性参数记为 θ_g , 则考虑模型不确定性的结构失效概率为

$$p_f(\theta_g) = \int_{g(x, \theta_g) \leq 0} f_X(x) dx. \quad (8)$$

对于统计参数 θ_g , 通常有 3 种数学处理方法: 点估计、区间估计和预测估计, 相应地也有 3 种结构可靠性的测度.

2.1 统计可靠度的点估计

设 $\hat{\theta}_g$ 为 θ_g 的某种点估计, 例如 $\hat{\theta}_g = M''_{\theta_g}$ 或 $\hat{\theta}_g = \theta_{MLE}$ (M''_{θ_g} 为 θ_g 的后验平均值, θ_{MLE} 为 θ_g 的最大似然估计), 则失效概率和可靠指标的估计分别为

$$\hat{p}_f \cong p_f(\hat{\theta}_g), \quad (9a)$$

$$\beta = \Phi^{-1}[1 - \hat{p}_f]. \quad (9b)$$

式中 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态累积分布函数(CDF)的反函数.

2.2 统计可靠度的区间估计

考虑某个统计参数 $\theta \in \theta_g$, 根据给定的置信水平 α , 寻求满足

$$P(\theta' \leq \theta \leq \theta'') = 1 - \alpha. \quad (10)$$

的 θ' 和 θ'' , 称为 θ 的区间估计问题.

β 的平均值和方差可按下式计算:

$$\mu_{\beta} \cong \beta(\mu_{\theta_g}), \quad (11a)$$

$$\sigma_{\beta}^2 \cong \nabla_{\theta_g} \beta(\mu_{\theta_g})^T \cdot \Sigma_{\theta_g} \cdot \nabla_{\theta_g} \beta(\mu_{\theta_g}). \quad (11b)$$

从而得到可靠指标的区间估计为 $\mu_{\beta} \pm \sigma_{\beta}$.

2.3 统计可靠度的预测估计

根据 Bayes 统计学的基本原理, $p_f(\theta_g)$ 的 Bayes 估计为其后验均值,即

$$E[p_f(\theta_g)] = \int_{\theta_g} p_f(\theta_g) f(\theta_g) d\theta_g. \quad (12)$$

式中 $f(\theta_g)$ 为 θ_g 的后验 PDF.

由 Fubini 定理,有

$$E[p_f(\theta_g)] = \int_{\theta_g} \left[\int_{g(x, \theta_g) \leq 0} f_X(x) dx \right] f(\theta_g) d\theta_g = \int_{g(x, \theta_g) \leq 0} \left[\int_{\theta_g} f_X(x) f(\theta_g) d\theta_g \right] dx. \quad (13)$$

式中 $\int_{\theta_g} f_X(x) f(\theta_g) d\theta_g = \tilde{f}(x)$ 为预测分布.

则失效概率的预测估计可表示为

$$\tilde{p}_f = \int_{\theta_g} p_f(\theta_g) \tilde{f}(\theta_g) d\theta_g = E[p_f(\theta_g)]. \quad (14)$$

3 考虑模型不确定性的结构可靠度分析方法

3.1 主观与客观不确定性的整体式分析方法

3.1.1 整体式分析方法 1:联合分析

将 θ_g 与 \mathbf{x} 同等对待,亦即将 θ_g 也视为随机变量,将其与 \mathbf{x} 一起组成扩展的随机向量,然后采用经典的随机可靠度理论进行分析.失效概率为

$$\tilde{p}_f = \int_{g(x, \theta_g) \leq 0} f(\mathbf{x}) f(\theta_g) d\theta_g d\mathbf{x}. \quad (15)$$

通常情况下,可以假设随机向量 \mathbf{x}, θ_g 相互独立,于是可以采用一次可靠度方法(FORM)、二次可靠度方法(SORM)或重要抽样(IS)法等经典方法对式(15)进行一次随机可靠度分析即可得到可靠指标和相应的失效概率.

3.1.2 整体式分析方法 2:嵌套分析

引入一个新的极限状态函数

$$\tilde{g}(u, \theta_g) = u + \beta(\theta_g). \quad (16)$$

式中 u 为标准正态随机变量,并与 θ_g 独立.

相应于式(16)的失效概率为

$$\begin{aligned} \hat{p}_f(\theta_g) &= \int_{u+\beta(\theta_g) \leq 0} f(\theta_g) \varphi(u) du d\theta_g = \\ &= \int_{\theta_g} \left[\int_{-\infty}^{-\beta(\theta_g)} \varphi(u) du \right] f(\theta_g) d\theta_g = \\ &= \int_{\theta_g} p_f(\theta_g) f(\theta_g) d\theta_g = \tilde{p}_f(\theta_g). \end{aligned} \quad (17)$$

可以看出,式(16)对应的失效概率 $\hat{p}_f(\theta_g)$ 即为预测失效概率 $\tilde{p}_f(\theta_g)$. 由于这种方法需要进行两层可靠度分析,第一层需要首先计算 $\beta(\theta_g)$, 第二层再计算失效概率 $\tilde{p}_f(\theta_g)$, 因此称之为“嵌套

可靠度”^[10]分析.

3.1.3 整体式分析方法 3:近似分析

这种方法直接求解预测可靠指标 $\tilde{\beta}$ 的近似表达式.对于功能函数式(16),如果 $\beta(\theta_g)$ 接近正态分布,则预测可靠指标可以近似为^[11]

$$\tilde{\beta} \cong \frac{\mu_{\beta}}{\sqrt{1 + \sigma_{\beta}^2}}. \quad (18)$$

式中 $\mu_{\beta} = E[\beta(\theta_g)]$, σ_{β} 为主观不确定性的测度.

3.2 主观与客观不确定性的分离式分析方法

与整体式分析方法不同,这种方法是将 $\beta(\theta_g)$ 单独视为一个随机变量.

$\beta(\theta_g)$ 的累积分布函数(CDF)为

$$F_{\beta(\theta_g)}(b) = \int_{\beta(\theta_g) - b \leq 0} f(\theta_g) d\theta_g. \quad (19)$$

显然,这是一个嵌套可靠度分析问题,内层需要首先计算 $\beta(\theta_g)$, 外层再计算 $F_{\beta(\theta_g)}(b)$.

将 $\beta(\theta_g)$ 在 \mathbf{M}''_{θ_g} 处近似展开为一次 Taylor 级数形式,可以得到 $\beta(\theta_g)$ 的一次近似为

$$\mu_{\beta} \cong \beta(\mathbf{M}''_{\theta_g}), \quad (20a)$$

$$\sigma_{\beta}^2 \cong (\nabla_{\theta_g} \beta)_{\theta_g = \mathbf{M}''_{\theta_g}}^T \cdot \Sigma''_{\theta_g} \cdot (\nabla_{\theta_g} \beta)_{\theta_g = \mathbf{M}''_{\theta_g}}. \quad (20b)$$

式中: \mathbf{M}''_{θ_g} 为 θ_g 的后验平均值, Σ''_{θ_g} 为 θ_g 的后验协方差矩阵.

4 算例分析

4.1 数值算例分析

考虑极限状态函数

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2) = X_1^2 - 2X_2. \quad (21)$$

式中:随机变量 X_1 服从对数正态分布, X_2 服从极大值 I 型分布, X_1 和 X_2 的累积分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1) = \Phi\left(\frac{\ln x_1 - \lambda}{\xi}\right), \quad (22)$$

$$F_{X_2}(x_2) = \exp\{-\exp[-\alpha(x_2 - u)]\}. \quad (23)$$

式中: λ 和 ξ 为对数平均值和标准差; α 和 u 分别为极值 I 型分布的尺度参数和位置参数.

已知随机向量 $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$ 的均值向量 \mathbf{M} 和协方差矩阵 Σ 分别为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}.$$

4.1.1 只考虑物理不确定性的随机可靠度分析

根据已知数据可得各随机变量的变异系数为

$$\delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.25.$$

根据对数正态随机变量参数之间的关系

$$\xi = \sqrt{\ln(1 + \delta_1^2)}, \lambda = \ln \mu_1 - \frac{1}{2} \xi^2. \quad (24)$$

可得 X_1 的参数为: $\lambda = 2.28, \xi = 0.198$.

根据极值 I 型随机变量参数之间的关系

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_2}, u = \mu_2 - \frac{0.5771}{\alpha} \quad (25)$$

可得 X_2 的参数为: $u = 17.750, \alpha = 0.257$.

根据 Nataf 概率分布理论,可得随机向量 X 的相关系数矩阵 R_0 为

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.51 \\ 0.51 & 1 \end{bmatrix}$$

对 R_0 进行 Cholesky 分解,得到下三角矩阵 L_0 为

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.51 & 0.86 \end{bmatrix}$$

采用一次可靠度方法 (FORM) 进行可靠指标和设计点的计算,得到的设计点为

$$u^* = [-2.13, 1.63]^T$$

可靠指标和失效概率分别为

$$\beta = 2.69, p_f = 0.0037$$

4.1.2 考虑物理不确定性和模型不确定性的统计可靠度分析

考虑模型不确定性,将式 (24) 重新表示为

$$g(X, \theta_g) = x_1^{\theta_1} - \theta_2 x_2 \quad (26)$$

式中: $\theta_g = [\theta_1, \theta_2]^T$ 为模型参数, $\mu_{\theta_1} = 2, \mu_{\theta_2} = 2$.

现设参数向量为: $\theta = [\lambda, \xi, u, \alpha, \theta_1, \theta_2]^T$. 对式 (26) 进行一次可靠度分析和概率灵敏度分析,得 β 和 p_f 对参数的灵敏度分析结果列于表 1.

表 1 参数灵敏度计算结果

灵敏度	参数 θ					
	λ	ξ	u	α	θ_1	θ_2
$\nabla_{\theta} \beta$	5.834 8	-12.422 3	-0.141 0	1.615 1	5.430 3	-1.458 7
$\nabla_{\theta} p_f$	-0.062 4	0.134 6	0.001 5	-0.017 5	-0.058 9	0.015 8

由表 1 可知,不同类型参数对可靠度指标的重要性差异非常明显,随机变量越重要,其参数的灵敏度绝对值越大.对于模型参数, θ_1 在功能函数中起重要作用,若模型参数 θ_1 增大至 2.1,则可靠指标的估计值近似为

$$\beta \cong 2.69 + 0.1 \times 5.43 = 3.23,$$

$$P_f = \Phi(-\beta) = 0.0006$$

采用一次可靠度方法得精确值 $\beta = 3.20$. 可见模型不确定性对可靠度的影响不可忽视.

4.2 考虑模型不确定性的砂土液化概率分析

4.2.1 砂土液化的统计预测模型

影响砂土液化的最重要 2 个变量是土壤的标准抗渗力 N 和由地震所引起的循环应力比 S , 最简单的砂土液化预测模型为

$$\hat{g}(N, S, \theta) = N - \theta_1 \ln S - \theta_2 \quad (27)$$

式中 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ 是模型参数向量. 由于这种简化模型的边界不是确定的,所以需对这些模型参数进行统计估计.

对于 n 个地点观测数据 $(N_i, S_i), i = 1, \dots, n$, 假设有 k 个已出现液化,其余 $n - k$ 个未发生液化. 若用 γ_i 表示第 i 次观测的模型误差,则 n 次观测的精确模型可表示为

$$g_i = \hat{g}(N_i, S_i, \theta) + \gamma_i, i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

似然函数与 k 点已液化和 $n - k$ 点未液化的概率成比例,即

$$L(\theta, \sigma_\gamma) \propto \prod_{i=1}^k \Phi\left[-\frac{\hat{g}(N_i, S_i, \theta)}{\sigma_{\gamma_i}}\right] \cdot \prod_{i=k+1}^n \Phi\left[-\frac{\hat{g}(N_i, S_i, \theta)}{\sigma_{\gamma_i}}\right] \quad (29)$$

式中 (θ, σ_γ) 为未知的模型参数,可应用 Bayes 修正公式得到其后验分布.

由 θ, γ 和 σ_γ 决定的模型 $g = \hat{g}(N, S, \theta) + \gamma$ 可用来预测任意 N 和 S 给定情况下砂土发生液化的概率

$$P[\hat{g}(N, S, \theta) + \gamma \leq 0] =$$

$$\int_{\hat{g}(N, S, \theta) + \gamma \leq 0} \phi(\gamma | \sigma_\gamma) f(\theta, \sigma_\gamma) d\gamma d\theta d\sigma_\gamma$$

式中: $\phi(\gamma | \sigma_\gamma)$ 是均值为 0, 方差为 σ_γ 的正态概率密度函数, $f(\theta, \sigma_\gamma)$ 是 (θ, σ_γ) 的后验联合分布.

根据历史资料,应用 Bayes 理论分析统计,可得相关参数的后验数据^[12],列入表 2.

表 2 液化模型参数的后验统计

$E[\theta_1]$	$\sqrt{\text{Var}[\theta_1]}$	$E[\theta_2]$	$\sqrt{\text{Var}[\theta_2]}$	$\rho_{\theta_1, \theta_2}$	$E[\sigma_\gamma]$
18.5	2.68	48.4	5.01	0.97	5.72

4.2.2 砂土液化的统计可靠性估计

设 γ 表示模型误差为零均值正态随机变量,则在循环应力作用下饱和的砂土液化的预测模型可更精确地表示为

$$g = N - \theta_1 \ln S - \theta_2 + \gamma$$

假设 N 为对数正态分布,均值 $\mu_N = 20$, 方差 $\sigma^2 = 0.20$; S 为极值 I 型分布, $\sigma^2 = 0.30$, 而均值 μ_s 为变量; γ 为零均值的正态分布,标准差 σ_γ 由表 2 可知. 用这些变量来说明缺少变量的模型的不准确性,例如影响液化潜能的孔隙压力和晶体尺寸没有体现在模型中. 虽然这些无法直接体现出来的变量是固有的,但这里假设表示可变性的随机变量 γ 是固定的随机类型,也就是说,如同 N 和 S 一样. 另一方面, N 和 S 的不确定性主要由模型误差及资料缺乏引起,因此,模型是简化的.

根据后验统计,即表 2 所提供的数据,用式 (20) 来估计随 S 的均值 μ_s 变化条件可靠指标的均值和方差范围. 这里采用一次可靠度方法进行分析,每给定一 μ_s 值,对其进行一次可靠度分析和参数灵敏度分析. 当 $\mu_s = 0.2$ 时,可得可靠指标和失效概率分别为

$$\beta = 0.2215, p_f = 0.41.$$

参数灵敏度分析结果列入表 3 和表 4.

表 3 模型参数灵敏度

模型参数	灵敏度	
	$\nabla_{\theta} \beta$	$\nabla_{\theta} p_f$
θ_1	0.187 0	-0.072 8
θ_2	-0.115 3	0.044 9

表 4 参数灵敏度计算结果

随机变量	β		p_f	
	$\nabla_{M\beta}$	$\nabla_d \beta$	$\nabla_{M p_f}$	$\nabla_d p_f$
N	0.117 3	-0.031 8	-0.045 6	0.012 4
S	-10.795 1	0.432 4	4.202 3	-0.168 3
γ	0.115 3	-0.016 8	-0.044 9	0.006 6

由表 3、4 可知,随机变量 S 在极限状态方程中起重要的作用,其相对应的参数也占主要位置,而对于模型参数而言, θ_1 占主导地位.

依据计算得到的灵敏度,再根据式 (20) 估算可靠指标的方差值,则均值 μ_β 和 $\mu_\beta \pm \sigma_\beta$ 所绘制函数见图 1,这种方法通过对基本随机变量 N, S 和 γ 参数的可靠性估计合并了 θ_1 和 θ_2 的不确定性. 图 1 给出了考虑模型不确定性时砂土液化可靠指标的区间估计,反映了关于可靠性估计的模型不确定性问题.

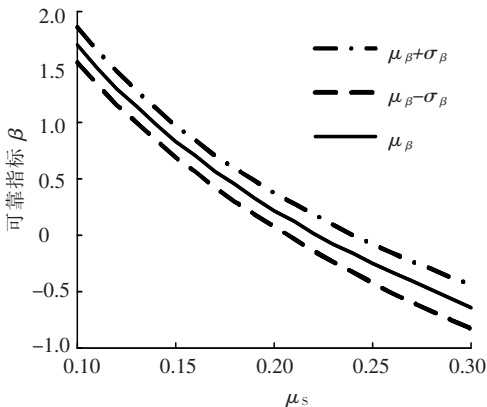


图 1 反映模型不确定性的砂土液化可靠指标曲线

5 结 语

应用 Bayes 统计学,系统研究了考虑模型不确定性的结构统计可靠度理论,给出考虑模型不

确定性的各种结构可靠性测度,并研究了综合考虑主观与客观不确定性的整体式与分离式可靠度计算方法. 分析表明,这种主观的模型不确定性对只考虑客观不确定性的随机可靠度有很大影响.

参考文献:

- [1] EGELAND T. Two trends in reliability [J]. Structural Safety, 1991, 9 (4): 261 - 268.
- [2] DITLEVSEN O. Model uncertainty in structural reliability [J]. Structural Safety, 1982, 1 (1): 73 - 86.
- [3] MAES M A. Codification of design load criteria subject to modeling uncertainty [J]. Journal of Structural Engineering, 1991, 117(10): 2988 - 3007.
- [4] ZHANG R X, MAHADEVAN S. Model uncertainty and Bayesian updating in reliability-based inspection [J]. Structural Safety, 2000, 22 (2): 145 - 160.
- [5] MAHADEVAN S, REBBA R. Validation of reliability computational models using Bayes networks [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2005, 87 (2): 223 - 232.
- [6] IGUSA T, BUONOPANE S G, ELLINGWOOD B R. Bayesian analysis of uncertainty for structural engineering applications [J]. Structural Safety, 2002, 24 (2/3/4): 165 - 186.
- [7] DER KIUREGHIAN A. Measures of structural safety under imperfect states of knowledge [J]. Journal of Structural Engineering, 1989, 115(5): 1119 - 1140.
- [8] GARDONI P, DER KIUREGHIAN A, MOSALAM K M. Probabilistic capacity models and fragility estimates for reinforced concrete columns based on experimental observations [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(10): 1024 - 1038.
- [9] GARDONI P, DER KIUREGHIAN A, MOSALAM K M. Probabilistic models and fragility estimates for bridge components and systems [R]. Department of Civil and Environmental Engineering. Berkeley: University of California, 2002.
- [10] WEN Y K, CHEN H C. On fast integration for time variant structural reliability [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1987, 2(3): 156 - 162.
- [11] 吕大刚, 宋鹏彦, 王光远. 考虑统计不确定性的结构可靠度分析方法 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(8): 1569 - 1574.
- [12] DER KIUREGHIAN A. Introduction to structural reliability [M]. Berkeley: University of California, 1999.

(编辑 赵丽莹)